

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ ПО КУРСУ  
“ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА” ПО МОДУЛЮ 1  
“ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА: ВВЕДЕНИЕ” для ИУ-9, 4 семестр, 2019

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Кольцо множеств. Теорема о пересечении колец. Теорема о минимальном кольце, содержащем данную систему множеств. Теорема о равенстве минимальных колец.
2. Сигма-кольцо (сигма-алгебра) множеств. Минимальное сигма-кольцо (сигма-алгебра), содержащее данную систему множеств. Теорема о равенстве минимальных сигма-колец. Борелевская сигма-алгебра. Классы множеств, порождающие борелевскую сигма-алгебру на прямой.
3. Полукольцо множеств. Примеры. Теорема о минимальном кольце, содержащем данное полукольцо.
4. Мера на полукольце множеств. Счётная аддитивность меры. Теорема о продолжении меры с полукольца на наименьшее содержащее его кольцо.
5. Свойства меры. Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой, их счётная аддитивность.
6. Внешнее продолжение меры, понятие измеримого множества (случай полукольца с единицей). Измеримость по Лебегу конечного или счётного множества. Теорема Каратеодори (без док-ва). Пример неизмеримого по Лебегу множества.
7. Внешнее продолжение меры, понятие измеримого множества (случай сигма-конечной меры). Теорема Каратеодори (без док-ва). Непрерывность меры. Связь непрерывности и счётной аддитивности.
8. Измеримые функции, измеримость по Лебегу, борелевость. Измеримость композиций. Достаточное условие измеримости. Арифметические операции над измеримыми функциями.
9. Измеримость верхнего и нижнего предела последовательности измеримых функций. Равенство функций почти всюду. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций.
10. Теорема Егорова.  $\mathcal{C}$ -свойство Лузина (без док-ва).
11. Сходимость по мере. Единственность предела. Арифметические свойства.
12. Связь сходимости по мере и почти всюду для пространств конечной и бесконечной меры. Пример последовательности, сходящейся по мере и не сходящейся почти всюду. Теорема Рисса.
13. Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций. Свойства интеграла Лебега для простых функций.
14. Определение интеграла Лебега для произвольной функции в случае конечной меры, корректность такого определения. Приближение измеримой функции простыми. Определение интеграла Лебега по сигма-конечной мере. Основные отличия конечного случая от сигма-конечного.
15. Основные свойства интеграла Лебега для произвольных функций.
16. Счётная аддитивность интеграла Лебега.
17. Неравенство Чебышева. Следствие о тривиальности неотрицательной функции с нулевым интегралом. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

### ЗАДАЧИ

1. Задачи по теме: системы множеств, вычисление мер множеств.
2. Задачи по теме: измеримые функции, сходимость по мере, интеграл Лебега.
3. Задачи теоретического характера.